Επίλυση Εξισώσεων

- Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

← μη-ομογενείς

- Μπορεί να υπάρχει ***μία***, ***πολλές*** ή ***καμία*** λύση

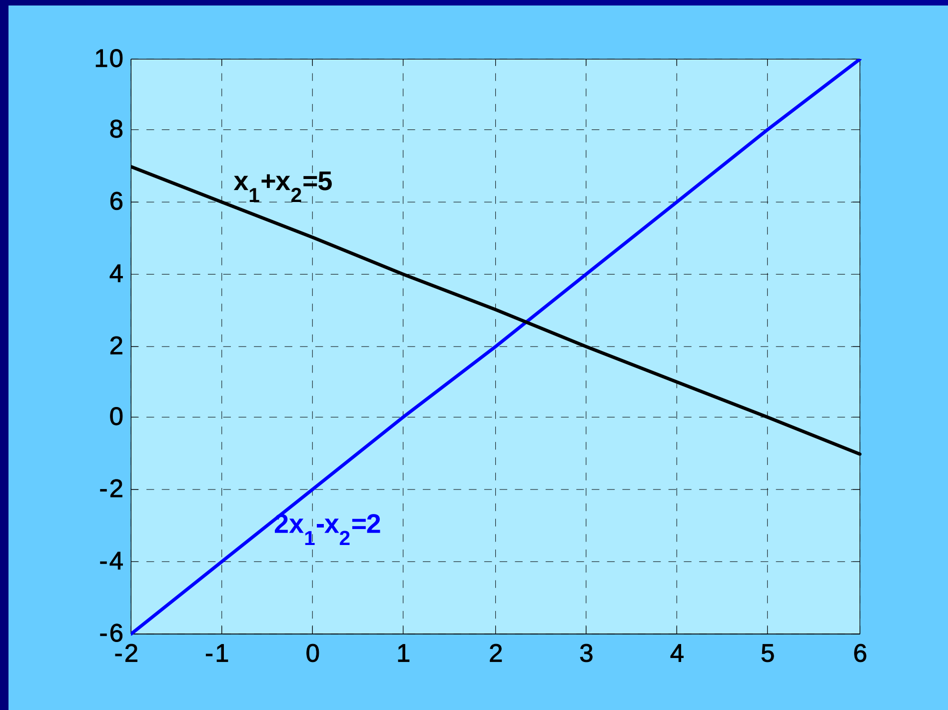
Επίλυση Εξισώσεων

- Έστω το σύστημα:

$$2x_1 - x_2 = 2$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

$$2x_1 - 2 = x_2$$
$$-x_1 + 5 = x_2$$

λύση:
x_1=7/3, x_2=8/3 → συντεταγμένες τομής γραμμών



Επίλυση Εξισώσεων

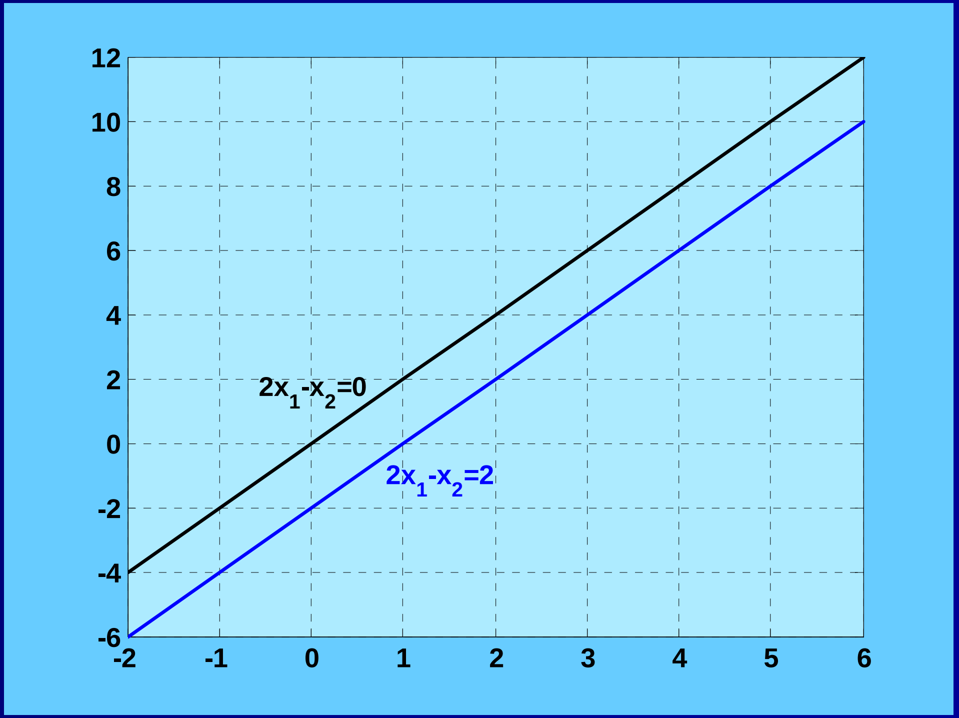
- Έστω το σύστημα:

$$2x_1 - x_2 = 2$$
$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2 = x_2$$
$$2x_1 = x_2$$

λύση:

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ



Επίλυση Εξισώσεων

- Έστω το σύστημα:

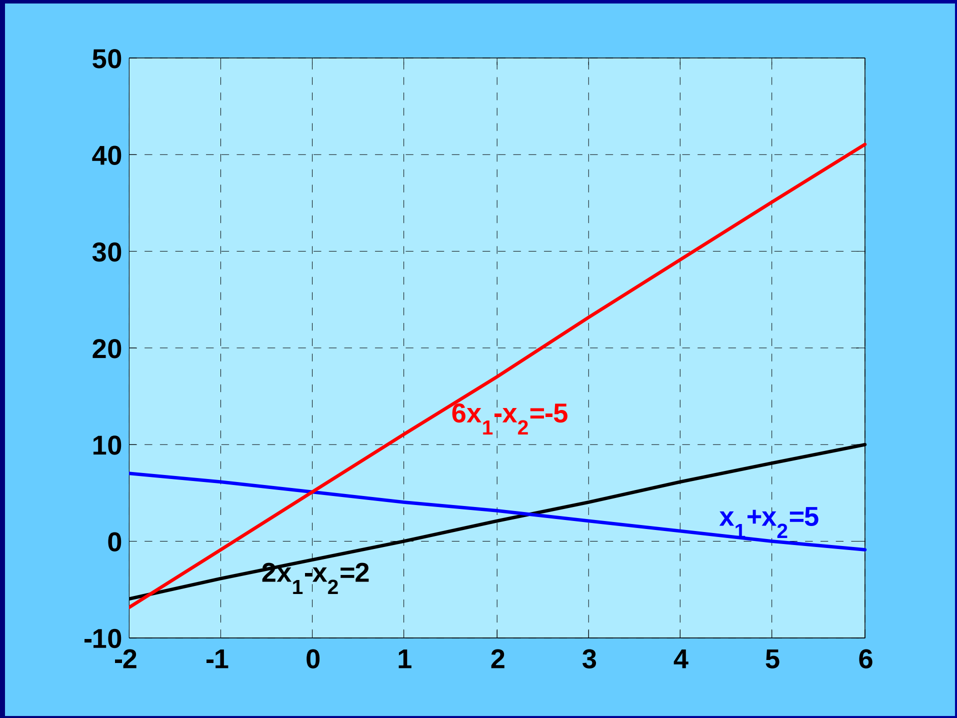
$$2x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$6x_1 - x_2 = -5$$

λύση:

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ



Επίλυση Εξισώσεων

Το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

παριστάνεται με μορφή πινάκων: AX=B

και λύνεται: $X=A^{-1}B$ ➔

X = inv(A) * B

- Χρήσιμη η κλασματική απεικόνιση **rats(X)**

Επίλυση Εξισώσεων

- Σύστημα της μορφής AX=0 → **Ομογενές**
- Περιπτώσεις:
  - det(A)<>0 → **προφανής λύση** X=0

    $2x_1-x_2=0$

    $x_1+x_2=0$ → det=3, $x_1=x_2=0$
  - det(A)=0 → μπορεί να υπάρχουν περισσότερες της μίας λύσης

    $-6x_1+3x_2=0$

    $2x_1-x_2=0$ → det=0, $x_2=2x_1$

Επίλυση Εξισώσεων

- **Τάξη** ενός πίνακα συντελεστών

$3x_1+4x_2-2x_3=0$

$-2x_1+3x_2-4x_3=0$

$5x_1+x_2+2x_3=0$ → Πίνακας A 4x3

$-9x_1+5x_2-10x_3=0$

  - Οι μεγαλύτερες ορίζουσες 3x3 όλες μηδέν (0)
  - Υπάρχουν 2x2 ορίζουσες μη-μηδενικές → *τάξη 2*
- Τάξη ενός πίνακα στο MATLAB: **rank(A)**
- Λύση συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους και έναν ελεύθερο άγνωστο:

$3x_1+4x_2=2x_3$

$-2x_1+3x_2=4x_3$ → λύσεις: $x_1=-10/17\ x_3$, $x_2=16/17\ x_3$

Επίλυση Εξισώσεων

- Επίλυση γραμμικών συστημάτων εξισώσεων στο MATLAB: τελεστής «\»

  $2x_1 - x_2 = 2$

  $x_1 + x_2 = 5$

  ➔ A=[2 -1; 1 1]; B=[2; 5]; X=A\B
- Ο τελεστής «\» δίνει πάντα λύση, ακόμη και ειδική
- Για τον έλεγχο εισάγεται η έννοια του **επαυξημένου πίνακα** [A B] και εξετάζεται η τάξη του A (n) και του [A B] (r).
  - r=n ➔ μοναδική λύση
  - r<n ➔ άπειρες λύσεις (ως προς n-r μεταβλητές)

Επίλυση Εξισώσεων

- Παράδειγμα επίλυσης:

$$2x_1+3x_2+4x_3=4$$
$$x_1+x_2+x_3=5$$

A=[2 3 4; 1 1 1]; B=[4; 5];

rank(A)=rank(B)=2 → υπάρχει μία λύση

A\B → [8; 0; -3]

τάξη<πλήθος μεταβλητών → λύση ως προς 3-2=1 ελεύθερες μεταβλητές

$x_1=11+x_3$, $x_2=-6-2x_3$

Επίλυση Εξισώσεων

- **Ψευδοαντίστροφος** ενός πίνακα:
  - Μη-τετραγωνικός πίνακας A (mxn) δεν έχει αντίστροφο
  - Μπορεί να οριστεί πίνακας P (nxm), ώστε:
    - A*P*A=A, P*A*P=P
    - Ο P ονομάζεται ψευδοαντίστροφος του A
  - Στο MATLAB: χρήση συνάρτησης **pinv**
    - Στο προηγούμενο παράδειγμα: X=pinv(A)*B

Επίλυση Εξισώσεων

- **Υπερπροσδιορισμένα** συστήματα (περισσότερες ανεξάρτητες εξισώσεις από αγνώστους):

$$x_1+2x_2+3x_3=12$$
$$3x_1+2x_2+x_3=15$$
$$3x_1+4x_2+7x_3=13$$
$$10x_1+9x_2+8x_3=17$$

  - rank(A)=3, rank([A B])=4
  - X = A\B=[1.0887; -02527; 1.5349]
  - !!!!! A*X=[5.18; 4.29; 13; 20.89] <> B !!!!!

Επίλυση Εξισώσεων

- **Υπερπροσδιορισμένα** συστήματα:
  - ***Λύση ελαχίστων τετραγώνων***
    - Έστω φαινόμενο στο οποίο δύο μεταβλητές σχετίζονται: y=a+bx
    - Έστω m πειράματα για τον προσδιορισμό των a, b
    - Στο i-οστό πείραμα έχουμε είσοδο x_i και μετρούμε έξοδο y_i
    - Ορίζουμε e_i το σφάλμα μέτρησης της yi. Έχουμε:
      - $y_i=a+bx_i+e_i$, i=1,2,…,m
    - Στην πράξη μετρούμε: $(y_i-e_i)=a+bx_i$
    - Για m>2 το σύστημα αυτό δεν έχει λύση → ενδιαφερόμαστε για προσέγγιση με ελαχιστοποίηση του αθροίσματος σφαλμάτων. $E=\Sigma\, e_i^2$ → **κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων**
    - Συνεπώς αναζητούνται a, b που ελαχιστοποιούν το *E*
    - Αποδεικνύεται ότι [a;b] = $(A'A)^{-1}A'Y$,
      όπου A=[1 x_1; 1 x_2; …; 1 x_m]

Επίλυση Εξισώσεων

- Λύση ελαχίστων τετραγώνων (συνέχεια)

```
x=0:.5:10; e=randn(1,length(x));
a=2.5; b=3.6; y=a+b*x+e;
A=[ ones(size(x))' x'];
Y=y';
X=inv(A'*A)*A'*Y
XX=A\Y % ← εδώ δίνει λύση κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων
plot(x,y,'*',x,(X(1)+X(2)*x),'r');
```

Επίλυση Εξισώσεων

- Λύση ελαχίστων τετραγώνων (συνέχεια)

  $2x-y_1= 2$ y1=2x-2

  $x+y_2= 5$ → y2=5-x

  $6x-y_3=-5$ y3=6x+5

```
A=[2 -1; 1 1; 6 -1]; B=[2; 5; -5]; X=A\B
x=-2:6; y1=2*x-2; y2=5-x; y3=6*x+5;
plot(x,y1,x,y2,x,y3,X(1),X(2),'*');
grid; axis tight;
legend('y_1=2x-2','y_2=5-x','y_3=6x+5', 'LSE solution');
```

Επίλυση Εξισώσεων

- Ασταθή συστήματα
  - Σφάλματα μετρήσεων και ανοχές

```
A=[1 1; 1 1.01]; B=[2; 2.01]; X=[1; 1];
format short; X=A\B
format long; X=A\B
% αλλαγή κατά 0,5% ➔
% 101% μείωση x1, 100% αύξηση x2
A(1,2)=1.005; X=A\B
% αλλαγή <0.25% στο B(2) ➔ 50% μεταβολή στα X
A(1,2)=1; B(2)=2.015; X=A\B
% δείκτης αξιοπιστίας ➔ ευαισθησία λύσης σε μεταβολές
format short e; cond(A), format short;
```

Επίλυση Εξισώσεων

- **Ασκήσεις:**

1. Δείξτε ότι το σύστημα δεν έχει λύση:

   $4x_1$-$4x_2$=3, $3x_1$-$3x_2$=0. Κάνετε χρήση θεμελιώδους ιδιότητας οριζουσών. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

2. Έστω το ασταθές σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.67 \\ 0.52 \end{bmatrix}$$

   (α). Βρείτε λύση

   (β). Βρείτε λύση εάν B(3)=0.53

   Δώστε σχετικές μεταβολές

   (γ). Βρείτε το δείκτη αξιοπιστίας και συμπεράσματα για τη λύση

3. Έστω αμπερόμετρο μεταβλητής κλίμακας. Η κλίμακά του οργάνου είναι 0-1mA. Η εσωτερική αντίστασή του είναι 55Ω. Να βρεθούν οι αντιστάσεις R1, R2, R3, R4

Θέση διακόπτη	Εύρος (mA)
A	0-10
B	0-50
C	0-100
D	0-500